©2005. **Н. В. Афанасьева**

ТЕОРЕМЫ ТИПА ФУДЖИТЫ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ В СЛУЧАЕ МЕДЛЕННО УБЫВАЮЩИХ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В данной работе рассматривается задача Коши для дважды нелинейного вырожденного параболического уравнения с нелокальным источником. Устанавливаются существование и несуществование в целом по времени решений этой задачи для начальных данных, медленно стремящихся к нулю.

1. Введение.

В данной работе рассматривается следующая задача Коши

$$u_t = div\left(u^{\alpha}|Du|^{m-1}Du\right) + \left(\int\limits_{\Omega}(1+|y|)^{\mu}u^q(y,t)dy\right)^{\frac{p-1}{q}} u^r, \qquad (1.1)$$

$$(x,t)\in Q_t = R^N\times(0;T), \quad T>0, \quad N\geq 1$$

$$u(x,0)=u_0(x)>0, \qquad x\in R^N, \qquad (1.2)$$

Здесь предполагается, что $m+\alpha-1\geq 0$, $p,r\geq 1$, $1<q<\infty$, $m>0$, $-N<\mu<N(q-1)$, Ω - область из R^N, $u_0(x)$- неотрицательная измеримая функция из $L_{1,loc}(R^N)$, удовлетворяющая дополнительному условию, которое укажем позже.

Целью работы является установление условий существования и несуществования в целом по времени решений задачи (1.1), (1.2) для некоторого класса начальных функций, вообще говоря, не принадлежащих $L_1(R^N)$.

В работе [1] для случая $p=1$, $m=1$, $\alpha=1$, $u_0\in L_1(R^N)$ впервые было показано, что необходимым условием глобальной разрешимости является некоторая малость начальной функции и ограничение на показатель r, а именно: $1<r<r^*=1+2/N$, если же $r>r^*$, то любое неотрицательное решение задачи (1.1), (1.2) "взрывается"за конечное время, то есть существует такое $0<T<\infty$, что

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}\to\infty \text{ при } t\to T.$$

Показатель r^* принято называть показателем Фуджиты.

Позже было установлено (см. например [2,3,4,5]), что в более общем случае при $p=1$ $r^*=m+\alpha+(m+1)/N$.

В работах [2,7] при $p>1$, $m=1$, $\alpha=0$ были приведены оценки для показателя Фуджиты. Изучению вопроса глобальной разрешимости задачи (1.1), (1.2) в классе медленно растущих функций в случае локального источника посвящены работы [8,9,10].

Прежде чем переходить к формулировке основных результатов введем некоторые понятия и обозначения

Пусть $B_\rho(x_0)=\{|x-x_0|<\rho\}$ - шар радиуса $\rho>0$ с центром в $x_0\in R^N$, $B_\rho\equiv B_\rho(0)$.

$$\fint\limits_{B_\rho(x_0)}\cdot dx = (mes_N B_\rho(x_0))^{-1}\int\limits_{B_\rho(x_0)}\cdot dx,$$

$$I(t) \equiv \int\limits_{\Omega} (1+|y|)^{\mu} u^q dy. \tag{1.3}$$

$$K = N(m+\alpha-1)+m+1, \quad K_\lambda = N(m+\alpha-1)+\lambda(m+1), \ \lambda \geq 1. \tag{1.4}$$

Будем предполагать, что u_0 такова, что конечна следующая величина

$$[u_0] = \sup_{x_0 \in R^N} \sup_{\rho>0} h(\rho) \fint\limits_{B_\rho(x_0)} u_0(x)dx,$$

где $h(s)$, $s>0$ непрерывная неотрицательную функция, удовлетворяющую следующим условиям:

$$h(s) \to \infty, \text{ при } s \to \infty; \tag{1.5}$$

найдется положительное число c_1 такое, что

$$h(\lambda s) \leq \lambda^{c_1} h(s), \text{ для всех } s>0, \ \lambda>1. \tag{1.6}$$

Пусть еще $\mathcal{R}(t)$ - это функция обратная к функции $\mathcal{H}(s) = s^{m+1}h^{m+\alpha-1}(s)$,

$$C = C_0[u_0]^{m+\alpha-1}, \tag{1.7}$$

где C_0 - достаточно большая постоянная

Будем говорить, что $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) в Q_T, если $u(x,t) \geq 0$ почти всюду в Q_T,

$$u \in L_{\infty,loc}(Q_T) \cap C\left((0,T); L_{2,loc}(R^N)\right),$$

$$u^\alpha |Du|^{m+1} \in L_{1,loc}(Q_T)$$

$$u^r \in L_{1,loc}(Q_T)$$

и для всякой ограниченной области $\Omega_1 \subset Q_T$ функция $u(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_1} \left(-u\eta_t + u^\alpha |Du|^{m-1} Du D\eta\right) dxdt = \int\limits_{\Omega_1} (I(t))^{\frac{p-1}{q}} u^r \eta dxdt,$$

для всякой $\eta \in C_0^1(\Omega_1)$, и, кроме того, $u(\cdot,t) \to u_0$ при $t \to 0$ в $L_{1,loc}(R^N)$. Далее под решением задачи (1.1), (1.2) будем понимать ее обобщенное решение.

Основные результаты работы изложены в следующих теоремах

Теорема 1.1. *Пусть* $\Omega = B_{\mathcal{R}(t)}$ *и*

$$D_0 = \int\limits_1^\infty \frac{\left(\mathcal{R}(\tau)\right)^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}} d\tau}{h^{p+r-2}\left(\mathcal{R}(\tau)\right)} < \infty. \tag{1.8}$$

Тогда существует решение $u(x,t)$ *задачи (1.1), (1.2), определенное для всех* $t>0$ *при условии, что*

$$\|u_0\|_{\lambda,R^N} + [u_0] \leq \delta, \tag{1.9}$$

где $\lambda > N(p+r-1-m-\alpha)/(m+1)$, *а* $\delta = \delta(N,m,\alpha,p,r,q,\mu)$ *достаточно малое число. Более того, для всех* $t > 0$ *имеет место оценка*

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N} \le \gamma_0 \frac{[u_0]}{h\left(\mathcal{R}\left([u_0]^{m+\alpha-1}\, t\right)\right)}. \tag{1.10}$$

Теорема 1.2. *Пусть* $\Omega = R^N$ *и функция* $h(\rho)$ *удовлетворяет условиям:*

$$h(\rho)\rho^{-\frac{m+1+(p-1)(N+\mu)/q}{r+p-1-m-\alpha}} \to 0 \text{ при } \rho \to \infty, \tag{1.11}$$

найдутся такие постоянные c_2, $c_3 > 0$, *что*

$$\fint_{B_\rho} u_0^{1-\theta}(x)dx \ge c_2 h^{-(1-\theta)}(\rho) \tag{1.12}$$

для всех $\rho > 0$ *и* $0 < \theta < c_3$. *Тогда любое решение задачи (1.1), (1.2) "взрывается"за конечное время.*

Замечание 1.1. Теоремы 1.1 и 1.2 были доказаны для случая $p = 1$, $m + \alpha - 1 < 0$ в работе [8].

Замечание 1.2. Если функция $u_0 = a(1+|x|)^{-\beta}$, где $(N+\mu)/q < \beta < N$ и $a > 0$ - некоторое достаточно малое число, то очевидно, что мы можем положить $h(\rho) = \rho^\beta$. Тогда из теорем 1.1 и 1.2 следует, что $r^* = m+\alpha+(m+1)/\beta-(p-1)(q\beta-N-\mu)/(q\beta)$. Для случая $p = 1$ этот результат совпадает с результатом работы [10].

2. Доказательство Теоремы 1.1.

Доказательство теоремы 1.1 проводится по схеме, изложенной в работах [3, 11].

Рассмотрим последовательность $u_n(x,t)$, $n \ge 1$, решений следующей начально-краевой задачи Коши-Дирихле

$$u_{nt} - div\left(u_n^\alpha |Du_n|^{m-1} Du_n\right) = \min\left\{ n, \left(\int_{R^N} (1+|y|)^\mu u_n^q dy\right)^{\frac{p-1}{q}} u_n^r \right\} \text{ в } B_n \times (0,+\infty), \tag{2.1}$$

$$u_n(x,t) = 0 \quad \text{на } \partial B_n \times (0,+\infty), \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = u_{0n} \quad x \in B_n, \tag{2.3}$$

где $B_n = B_{\rho_n}(0)$, с некоторой последовательностью $\rho_n \to \infty$ при $n \to \infty$, а $u_{0n} \in C_0^\infty(B_n)$ такие, что $u_{0n} \to u_0$ в $L_{1,loc}(R^N) \cap L_\lambda(R^N)$. Продолжив u_n нулем вне $B_n \times (0;\infty)$, мы определим его во всем $R^N \times (0;\infty)$. Из результатов работы [12] следует, что задача (2.1)-(2.3) глобально разрешима при всяком фиксированном n.

Для упрощения дальнейших записей введем величину

$$\langle u \rangle_t = \sup_{0<\tau<t} \sup_{x_0 \in R^N} \sup_{\rho > \mathcal{R}(Ct)} h(\rho) \fint_{B_\rho(x_0)} u(\cdot,\tau)dx,$$

где постоянная C определена в (1.7). Для доказательства нам потребуются две следующие леммы

Лемма 2.1. *Пусть $u(x,t)$ является решением уравнения (2.1) и $T>0$ таково, что для всех $0<t<T$ выполнены неравенства*

$$\frac{t}{\mathcal{R}(Ct)}\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}^{m+\alpha-1}<1, \quad tI^{\frac{p-1}{q}}(t)\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}^{p-1}<1. \tag{2.4}$$

Тогда найдется постоянная $\gamma=\gamma(N,m,\alpha,r,p,q,\mu)$, такая, что верно неравенство

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}\le\gamma\frac{C^{N/K}\langle u\rangle_t^{\frac{m+1}{K}}}{h\left(\mathcal{R}(Ct)\right)}. \tag{2.5}$$

Лемма 2.2. *В условиях леммы 2.1 при для всякого $\rho\ge\mathcal{R}(Ct)$ и $0<t<T$, где T, то же, что и в лемме 2.1, имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^t\int\limits_{B_{\rho/2}}|Du|^m u^\alpha dxd\tau\le\gamma C^{-1/K}\mathcal{R}(Ct)\sup_{0<\tau<t}\|u(\cdot,\tau)\|_{1,B_\rho}\langle u\rangle_\tau^{\frac{m+\alpha-1}{K}}, \tag{2.6}$$

где $\gamma=\gamma(N,m,\alpha,r,p,q,\mu)$

Доказательство этих лемм проводится также как это было сделано в работах [8,9], здесь мы его опускаем.

Как следует из работ [3, 11] в условиях леммы 2.1 для всех $0<t<T$ и $\rho>\mathcal{R}(Ct)$ и $n\ge1$ справедлива следующая оценка

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,B_\rho}\le\gamma t^{-\frac{N}{K}}\left(\fint\limits_0^t\int\limits_{B_2\rho}u(\cdot,\tau)dxd\tau\right)^{\frac{m+1}{K}}, \tag{2.7}$$

здесь $\gamma=\gamma(N,m,\alpha,p,r,q,\mu)$ и не зависит от n. Везде далее в работе через γ обозначены постоянные, которые зависят лишь от параметров задачи и известных величин.

Теорема будет доказана, если покажем, что для всех $t>0$ и всех $n\ge1$ имеет место неравенство

$$\langle u\rangle_t\le\gamma[u_0], \tag{2.8}$$

где γ не зависит от n, и выполнены условия (2.4). Тогда будет возможно применить предельный переход и утверждение теоремы будет следовать из неравенств (2.7) и (2.8).

Введем величины

$$T_1=\sup\{t>0:\text{ выполнено первое из условий (2.4)}\},$$

$$t_1=\sup\{t>0:\text{ выполнено второе из условий (2.4) }\}.$$

Умножим обе части уравнения (2.1) на $u^{\lambda-1}$ и проинтегрируем результат по $Q_t=(0;t)\times R^N$, где $t\in(0;\min\{T_1,t_1\})$, получим

$$\int\limits_{R^N}u^\lambda dx\le\int\limits_{R^N}u_0^\lambda dx+\gamma\mathcal{R}(t)^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}}\Phi_\lambda(t)\Psi_\lambda(t), \tag{2.9}$$

где $\Phi_\lambda(t) = \sup\limits_{0<\tau<t} \int\limits_{R^N} u^\lambda$, а $\Psi_\lambda(t) = t^{1-\frac{N(p+r-2)}{K_\lambda}} \Phi_\lambda(t)^{\frac{(p+r-2)(m+1)}{K_\lambda}}$. Понятно, что $\Psi_\lambda(t) < \infty$ в силу условия на λ.

Введем еще величину

$$T_0 = \sup\{t > 0 : \ \mathcal{R}(t)\Psi_\lambda(t) < \varepsilon\}.$$

Тогда из неравенства (2.9) при достаточно малом ε, следует

$$\Phi_\lambda(t) \le \gamma \|u_0\|^\lambda_{\lambda,R^N}, \quad t \in (0 \min\{T_0, T_1, t_1\}). \tag{2.10}$$

Найдем T_0' из условия

$$\gamma\,(T_0')^{1-\frac{N(p+r-2)}{K_\lambda}} \left(\mathcal{R}(T_0')\right)^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}} \|u_0\|^{\frac{\lambda(p+r-2)(m+1)}{K_\lambda}}_{\lambda,R^N} = \varepsilon.$$

В силу того, что функция $t^{1-\frac{N(p+r-2)}{K_\lambda}} \left(\mathcal{R}(t)\right)^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}}$ возрастает, можем утверждать, что если δ достаточно мало, то $T_0' > 1$, а из определения T_0 следует, что $T_0 > T_0' > 1$.

Если теперь $t \in (0; \min\{T_0, T_1, t_1\})$, то из (2.7) и (2.10) имеем

$$tI^{\frac{p-1}{q}}(t)\|u(\cdot,t)\|^{r-1}_{\infty,R^N} \le t^{1-\frac{N(r+p-2)}{K_\lambda}} \mathcal{R}^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}}(t)\|u_0\|^{\lambda\frac{(r+p-2)(m+1)}{K_\lambda}}_{\lambda,R^N} \le \frac{1}{4}.$$

Откуда заключаем, что $T_1 > T_0$.

Пусть $\rho > \mathcal{R}(t)$. Введем стандартную гладкую срезающую функцию $\zeta = \zeta(x)$ шара $B_\rho = B_\rho(0)$ со следующими свойствами $0 < \zeta(x) < 1$, $\zeta(x) \equiv 1$, при $|x| < \rho/2$, $\zeta(x) \equiv 0$, когда $|x| > \rho$ и кроме того $|D\zeta| \le \gamma\rho^{-1}$ с некоторой постоянной $\gamma > 0$. Умножим уравнение (2.1) на $\zeta(x)$ и проинтегрируем по $(0,t)\times B_\rho$, где $t \in (0, \min\{T_0, t_1\})$. Умножим еще полученное равенство на $h(\rho)\rho^{-N}$. Используя лемму 2.2, получаем

$$h(\rho) \fint\limits_{B_{\rho/2}} u dx \le [u_0] + \gamma C_0^{-1/K}[u_0]^{-\frac{m+\alpha-1}{K}} \langle u\rangle_t^{1+\frac{m+\alpha-1}{K}} +$$

$$+\gamma\langle u\rangle_t \int\limits_0^t \|u(\cdot,\tau)\|^{r-1}_{\infty,B_\rho} I^{\frac{p-1}{q}}(t)d\tau,\ t \in (0, \min\{T_0, t_1\})\,. \tag{2.11}$$

Введем величину $t_2 = \sup\{0 < \tau < t : \langle u\rangle_t < 4\gamma_1[u_0]\}$, где $\gamma_1 > 0$ некоторое число. Тогда из (2.11) и определений t_2, T_0, для всех $t \in (0, \min\{t_1, t_2, T_0\})$ следует, что

$$h(\rho) \fint\limits_{B_{\rho/2}} u dx \le \gamma[u_0] + \gamma(4\gamma_1)^{\frac{m+\alpha-1}{K}} C_0^{-1/K}\langle u\rangle_t + \gamma\varepsilon\langle u\rangle_t$$

Из последнего неравенства при достаточно малом ε и достаточно большом C_0 получаем

$$\langle u\rangle_t \le 2\gamma_1[u_0], \quad 0 < t \min < \{t_1, t_2, T_0\}. \tag{2.12}$$

Из (2.12) в силу свойств $\langle u\rangle_t$ и определения t_2 следует, что $t_2 > \min\{t_1, T_0\}$.

Далее, применяя леммы 2.1 и 2.2, при достаточно большом C_0 имеем

$$\frac{t}{\mathcal{R}^{m+1}(Ct)}\|u(\cdot,t)\|^{m+\alpha-1}_{\infty,R^N} \le \gamma \frac{tC^{\frac{N(m+\alpha-1)}{K}}\langle u\rangle_t^{\frac{(m+1)(m+\alpha-1)}{K}}}{\mathcal{R}^{m+1}(Ct)h^{m+\alpha-1}(\mathcal{R}(Ct))} \le$$

$$\le \gamma(\gamma_1)^{\frac{(m+1)(m+\alpha-1)}{K}} C_0^{-\frac{m+1}{K}} \le \frac{1}{4}.$$

Отсюда заключаем, что $t_1 > T_0$.

Пусть теперь $t \in (1, \min\{T_1, t_1, t_2\})$ Поступая так же, как и при выводе (2.11), при помощи леммы 2.1 и леммы 2.2 получаем

$$h(\rho) \fint_{B_{\rho/2}} u dx \le [u_0] + \gamma C_0^{-1/K} \left(\langle u\rangle_t [u_0]^{-1}\right)^{\frac{m+\alpha-1}{K}} \langle u\rangle_t +$$

$$+\gamma C^{\frac{N(p+r-2)}{K}} \int_1^t \langle u\rangle_t^{1+\frac{(p+r-2)(m+1)}{K}} \mathcal{R}(\tau)^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}} h^{-(p+r-2)}(C\tau)d\tau. \qquad (2.13)$$

Выбираем C_0 настолько большим, что $C = C_0[u_0]^{m+\alpha-1} > 1$, тогда $h(\mathcal{R}(\tau)) \le h(\mathcal{R}(C\tau))$ И из (2.13) следует

$$\langle u\rangle_t \le \gamma[u_0] + \gamma C^{\frac{N(p+r-2)}{K}} \int_1^t \langle u\rangle_\tau^{1+\frac{(p+r-2)(m+1)}{K}} \mathcal{R}^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}}(\tau) h^{-(p+r-2)}(\tau)d\tau.$$

Заметим, что $\langle u\rangle_t$ можно оценит сверху функцией $y(t)$, которая является решением следующей задачи Коши

$$\begin{aligned} &y' = \gamma C^{\frac{N(p+r-2)}{K}} y^{1+\frac{(p+r-2)(m+1)}{K}} (\mathcal{R}(\tau))^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}} h^{-(p+r-2)}(\tau), \\ &y(1) = \gamma[u_0]. \end{aligned}$$

Непосредственно решая эту задачу, получаем

$$y(t) = \gamma[u_0]\left(1 - \gamma C_0^{\frac{N(p+r-2)}{K}} [u_0]^{p+r-2} \int_1^t (\mathcal{R}(\tau))^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}} h^{-(p+r-2)}(\tau)d\tau.\right)^{-\frac{K}{(m+1)(p+r-2)}}.$$

Отсюда придходим к неравенству

$$\langle u\rangle_t \le y(t) \le \gamma[u_0]\left(1 - \gamma\left(C_0[u_0]^{m+\alpha-1}\right)^{\frac{N(p+r-2)}{K}-1} [u_0]^{\frac{(m+1)(p+r-2)}{K}} D_0\right)^{-\frac{K}{(m+1)(p+r-2)}}. \qquad (2.14)$$

В силу условия (1.8) при достаточно малом $[u_0]$ выражение в скобках в (2.14) положительно и, следовательно,

$$\langle u\rangle_t \le \gamma[u_0], \quad t \in (0, \min\{T_1, t_1, t_2\}). \qquad (2.15)$$

Также как и ранее можно показать, что t_1, $t_2 \ge T_1$.

Покажем, наконец, что $T_1 = \infty$. Пусть $t \in (1, T_1)$, тогда применяя лемму 2.1, с учетом (2.15) получаем

$$t\,(I(t))^{\frac{p-1}{q}}\,\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}^{r-1} \le \gamma t\,(\mathcal{R}(t))^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}}\left(\frac{[u_0]}{h(\mathcal{R}(t))}\right)^{p+r-2}$$

Из последнего неравенства, с учетом того, что $\mathcal{R}^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}}(t)\,(h(\mathcal{R}(t)))^{-(p+r-2)} \to 0$ при $t \to \infty$, имеем

$$t\,(I(t))^{\frac{p-1}{q}}\,\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}^{r-1} \le \gamma[u_0]^{p+r-2}\left((t-1)\frac{\mathcal{R}^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}}(t)}{h^{p+r-2}(\mathcal{R}(t))} + \frac{\mathcal{R}^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}}(1)}{h^{p+r-2}(\mathcal{R}(1))}\right) \le$$

$$\le \gamma[u_0]^{p+r-2}\left(D_0 + + \frac{\mathcal{R}^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}}(1)}{h^{p+r-2}(\mathcal{R}(1))}\right) \le \frac{1}{4}.$$

Отсюда заключаем, что $T_1 = \infty$. Теорема 1.1 доказана.

3. Доказательство Теоремы 1.2.

Пусть $0 < \theta < \min\{1, c_3\}$ -некоторое как угодно малое число, которое определи позже. Воспользуемся стандартной гладкой срезающей функцией шара $\zeta = \zeta(x)$ B_ρ с теми же свойствами, что и в пункте 2. Умножим обе части уравнения (1.1) на функцию $(u+\varepsilon)^{-\theta}\zeta^s(x)$, $\varepsilon > 0$-сколь угодно малая величина и $s > m+1$. Проинтегрируем полученное равенство по R^N и применим неравенство Юнга в правой части, получим

$$\frac{1}{1-\theta}\frac{d}{dt}\int\limits_{B_{2\rho}} \zeta^s(u+\varepsilon)^{1-\theta}dx \ge -\gamma\rho^{-(m+1)}\int\limits_{R^N}(u+\varepsilon)^{m+\alpha-\theta}\zeta^{s-m-1}dx +$$

$$+(I(t))^{(p-1)/q}\int\limits_{R^N} u^{r-\theta}(\cdot,t)\zeta dx. \tag{3.1}$$

Из неравенства Гельдера имеем

$$\int\limits_{R^N} u^{1-\theta}(\cdot,t)\zeta^s dx \le (I(t))^{(1-\theta)/q}\left(\int\limits_{R^N}(1+|y|)^{-\frac{\mu(1-\theta)}{q-1+\theta}}\zeta^{\frac{sq}{q-1+\theta}}dy\right)^{\frac{q-1+\theta}{q}} \le$$

$$\le (I(t))^{(1-\theta)/q}\rho^{\frac{N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta)}{q}}.$$

Отсюда получаем, что

$$(I(t))^{(p-1)/q} \ge \rho^{-\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))}{q(1-\theta)}}\left(\int\limits_{R^N} u^{1-\theta}(\cdot,t)\zeta^s dx\right)^{\frac{p-1}{1-\theta}}. \tag{3.2}$$

Обозначим

$$E(t) = \int\limits_{R^N} u^{1-\theta}(\cdot,t)\zeta^s dx, \tag{3.3}$$

Перейдем в (3.1) к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом (3.3) это даст

$$\frac{dE}{dt} \geq -\gamma^{-(m+1)} \int\limits_{R^N} (u+\varepsilon)^{m+\alpha-\theta} \zeta^{s-m-1} dx +$$

$$+\gamma \rho^{-\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))}{q(1-\theta)}} (E(t))^{\frac{p-1}{1-\theta}} \int\limits_{R^N} u^{r-\theta}(\cdot,t) \zeta^s dx. \tag{3.4}$$

В первом слагаемом правой части (3.4) применим неравенство Гельдера

$$\rho^{-(m+1)} \int\limits_{B_{2\rho}} u^{m+\alpha-\theta} \zeta^{s-m-1} dx \leq \gamma \rho^{-(m+1)+N\frac{1-(m+\alpha-\theta)}{r-\theta}} \left(\int\limits_{R^N} u^{r-\theta}(\cdot,t) \zeta^{\frac{(s-m-1)(r-\theta)}{m+\alpha-\theta}} dx \right)^{\frac{m+\alpha-\theta}{r-\theta}}.$$

Подберем s из условия

$$s = \frac{(s-m-1)(r-\theta)}{m+\alpha-\theta} > m+1.$$

Применим теперь в первом слагаемом правой части (3.4) неравенство Юнга с некоторой постоянной $\varepsilon_1 > 0$

$$\rho^{-(m+1)} \int\limits_{R^N} u^{m+\alpha-\theta} \zeta^{s-m-1} dx \leq \frac{\varepsilon_1^{\frac{r-\theta}{m+\alpha-\theta}} (m+\alpha-\theta)}{r-\theta} \int\limits_{R^N} u^{r-\theta} \zeta^s dx +$$

$$+\gamma \frac{\varepsilon_1^{-\frac{r-\theta}{r-m-\alpha}} (r-m-\alpha)}{r-\theta} \rho^{N-\frac{(m+1)(r-\theta)}{r-m-\alpha}}. \tag{3.5}$$

Возьмем

$$\varepsilon_1 = \frac{\gamma(r-\theta)}{2(m+\alpha-\theta)} \rho^{-\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))(m+\alpha-\theta)}{q(1-\theta)(r-\theta)}} E^{\frac{(p-1)(m+\alpha-\theta)}{(1-\theta)(r-\theta)}}(t).$$

С таким выбором ε_1 из (3.4) следует

$$\frac{dE}{dt} \geq -\gamma \rho^{N-\frac{(m+1)(r-\theta)}{r-m-\alpha}+\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))(m+\alpha-\theta)}{q(1-\theta)(r-m-\alpha)}} (E(t))^{-\frac{(p-1)(m+\alpha-\theta)}{(1-\theta)(r-m-\alpha)}} +$$

$$+\gamma \rho^{-\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))}{q(1-\theta)}} (E(t))^{\frac{p-1}{1-\theta}} \int\limits_{R^N} u^{r-\theta} \zeta^s dx. \tag{3.6}$$

Допустим, что в правой части первое слагаемое по абсолютной величине больше второго слагаемого, то есть, что

$$\int\limits_{R^N} u^{r-\theta} \zeta^s dx \leq \gamma \rho^{N-\frac{r-\theta}{r-m-\alpha}\left(m+1+\frac{(p-1)(N+\mu)}{q}-\frac{N(p-1)}{1-\theta}\right)} (E(t))^{-\frac{(p-1)(r-\theta)}{(1-\theta)(r-m-\alpha)}}. \tag{3.7}$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера из (3.7) получим

$$E(t) \leq \gamma \rho^{N(r-1)/(r-\theta)} \left(\int\limits_{R^N} u^{r-\theta}(\cdot,t) \zeta^s dx \right)^{(1-\theta)/(r-\theta)} \leq$$

$$\leq \gamma \rho^{N-\frac{1-\theta}{r-m-\alpha}\left(m+1+\frac{(p-1)(N+\mu)}{q}-\frac{N(p-1)}{1-\theta}\right)} E^{-\frac{p-1}{r-m-\alpha}}(t).$$

Откуда

$$E(t) \leq \gamma \rho^{N-\frac{1-\theta}{p+r-1-m-\alpha}\left(m+1+\frac{(p-1)(N+\mu)}{q}\right)}. \tag{3.8}$$

Умножим неравенство (3.8) на $h^{1-\theta}(\rho)\rho^{-N}$, тогда в силу условий теоремы

$$h^{1-\theta}(\rho) \fint_{B_\rho} u^{1-\theta}(\cdot,t)dx \leq \left(h(\rho)\rho^{-\frac{m+1+(p-1)(N+\mu)/q}{p+r-1-m-\alpha}}\right)^{1-\theta} \to 0, \text{ при } \rho \to \infty. \tag{3.9}$$

С другой стороны, интегрируя неравенство (3.6) по $(0,t)$, получаем

$$E(t) \geq \int_{B_\rho} u_0^{1-\theta}\zeta^s dx - \gamma\rho^{N-l} \int_0^t E^{-\frac{(p-1)(m+\alpha-\theta)}{(1-\theta)(r-m-\alpha)}}(\tau)d\tau, \tag{3.10}$$

с $l = \frac{(m+1)(r-\theta)}{r-m-\alpha} - \frac{(p-1)(m+\alpha-\theta)}{r-m-\alpha}\left(\frac{N}{1-\theta} - \frac{N+\mu}{q}\right)$.

Очевидно, что $E(t) \geq y(t)$, где $y(t)$ является решением следующей задачи Коши

$$\begin{cases} y' = -\gamma\rho^{N-l}\left(y(t)\right)^{-\frac{(p-1)(m+\alpha-\theta)}{(1-\theta)(r-m-\alpha)}}, \\ y(0) = \int_{B_\rho} u_0^{1-\theta}\zeta^s dx. \end{cases} \tag{3.11}$$

Решая задачу (3.11), имеем

$$E(t) \geq y(t) = y(0)\left(1 - (y(0))^{-\left(1+\frac{(p-1)(m+\alpha-\theta)}{(1-\theta)(r-m-\alpha)}\right)} t\rho^{N-l}\right)^{\frac{(1-\theta)(r-m-\alpha)}{(1-\theta)(r-m-\alpha)+(p-1)(m+\alpha-\theta)}}. \tag{3.12}$$

Пусть $\rho > \mathcal{R}(t)$, тогда $t < \rho^{m+1}h^{m+\alpha-1}(\rho)$ (в силу определения функции $\mathcal{R}(t)$). Умножим (3.12) на $h^{1-\theta}(\rho)\rho^{-N}$, получим

$$h^{1-\theta}(\rho)\fint_{B_\rho} u^{1-\theta}(\cdot,t)dx \geq \gamma h^{1-\theta}(\rho)\fint_{B_\rho} u_0^{1-\theta}dx \times$$

$$\times\left(1 - \left(\fint_{B_\rho} u_0^{1-\theta}dx\right)^{-\left(1+\frac{(p-1)(m+\alpha-\theta)}{(1-\theta)(r-m-\alpha)}\right)} \left(h(\rho)\rho^{-\frac{m+1+(p-1)(N+\mu)/q}{r+p-1-m-\alpha}}\right)^{\frac{(m+\alpha-\theta)(r+p-1-m-\alpha)}{r-m-\alpha}}\right)$$

Ввиду условия (1.11) выражение в скобках при достаточно большом ρ положительно, следовательно, в силу условия (1.12)

$$h^{1-\theta}(\rho)\fint_{B_\rho} u^{1-\theta}(\cdot,t)dx \geq \gamma h^{1-\theta}(\rho)\fint_{B_\rho} u_0^{1-\theta}dx > 0,$$

что противоречит (3.9). Значит, предположение (3.7) не верно. Таким образом из (3.6) имеем

$$\frac{dE}{dt} \geq \gamma\rho^{-\frac{(p-1)(Nq-(N+\mu)(1-\theta))}{q(1-\theta)}} E^{\frac{p-1}{1-\theta}}(t) \int_{R^N} u^{r-\theta}(\cdot,t)\zeta^s dx.$$

Воспользовавшись как и ранее неравенством Гельдера, получаем

$$\frac{dE}{dt} \geq \gamma\rho^{-\frac{(p-1)(Nq-(N+\mu)(1-\theta))+N(r-1)q}{q(1-\theta)}} E^{\frac{p+r-1-\theta}{1-\theta}}(t).$$

Интегрирование последнего неравенства по $(0,t)$ приводит к оценке

$$E(t) \geq E(0)\left(1-\gamma t\rho^{-l_1}E^{\frac{p+r-2}{1-\theta}}(0)\right)^{-\frac{1-\theta}{p+r-2}},$$

где $E(0) = \int\limits_{R^N} u_0^{1-\theta}(\cdot,t)\zeta^s dx$, и $l_1 = N(p+r-2)/(1-\theta)-(p-1)(N+\mu)/q > 0$. Из последнего неравенства следует, что $E(t)\to\infty$, при $t\to T = \gamma\rho^{l_1}E^{-\frac{p+r-2}{1-\theta}}(0)$. Теорема доказана.

1. *Fujita H.* On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \triangle u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. 1966. V. 13. P. 109-124.
2. *Galaktionov V.A., Levine H.A.* A general approach to critical Fujita exponents and systems // Nonlinear Anal. TMA. 1998. V. 34 P. 1005-1027.
3. *Andreucci D., Tedeev A.F.* A Fujita type result for degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary // J. Math. Anal. Appl. 1999. V. 231. P. 543-567.
4. *Andreucci D., Tedeev A.F.* Optimal bounds and blow-up phenomena for parabolic problems in narrowing domains // Proceeding of the Royal Soc of Ed. 1998. V. 128. № 6. P. 1163-1180.
5. *Levine H.A.* The role of critical exponents in blow up theorems // Review.- 1990.- V. 32.- P. 262-288.
6. *Deng K. Levine H.A.* The role of critical exponents in blow-up theorems. The sequal // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 243. P. 85-126.
7. *Deng K., Kwong M.K., Levine H.A.* The influence of nonlocal nonlinearities on the long-time behavior of solutions of Burgers' equation // Quart. Appl. Math.- 1992.- V.50. - P. 173-200.
8. *Афанасьева Н.В., Тедеев А.Ф.* Теоремы типа Фуджиты для квазилинейных параболических уравнений в случае медленно стремящихся к нулю начальных данных.// Мат.сборник. 2004. Т.195 №4 С.3-22.
9. *Cirmi G.R., Leonardi S., Tedeev A.F.* The asymptotic behavior of the solution of a quasilinear parabolic equation with blow-up term -Catania, 1998.-18 p.-(Preprint / Universita di Catania Dipartimento di Matematica ed Informatica)
10. *Mukai K., Mochuzuki K., Huang Q.* Large time behavior and life span for a quasilinear parabolic equation with slow decay initial values // Nonlinear Analysis. - 2000.- v. 39 A:1. - p. 33-45.
11. *Andreucci D., Di Benedetto E.* On the Cauchy problem and initial traces for a class of evolution equaions with strongly nonlinear sources // Analli. Sci. Normale Sup. Pisa. 1991. V.18. P. 363-441.
12. *Tsutsumi M.* On solution of some doubly nonlinear parabolic equations with absorbtion // J. Math. Anal. Appl. -1988.-V.132.- P.187-212.

Институт прикладной математики и механики
ул. Р.Люксембург, 74,
83114, г.Донецк, Украина

Получено 14.10.2004